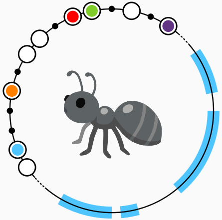
Soutenance de thèse

Modèles discrets et continus de dispersion aléatoire en dimension 1, analyse d'un algorithme d'apprentissage par renforcement

Zoé Varin

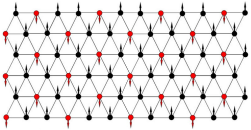
20 Octobre 2025

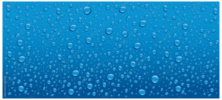
Thèse effectuée sous la direction de Jean-François Marckert

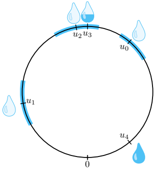


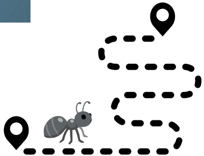
Une thèse à l'interface combinatoire-probabilités

Des modèles aléatoires simples pour expliquer des phénomènes complexes





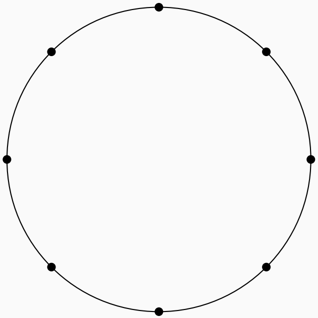




Le modèle de golf

Définition du modèle de golf

$G = (V, E)$, ici $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

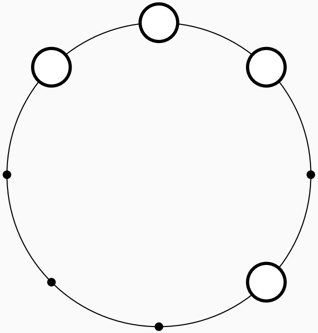


Définition du modèle de golf

- **Une configuration initiale (aléatoire)**

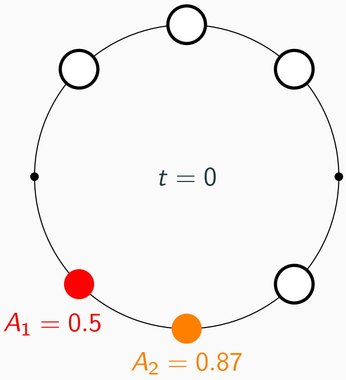
N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \left\{ \bigcirc \right\}$$



Définition du modèle de golf

- **Une configuration initiale (aléatoire)**



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

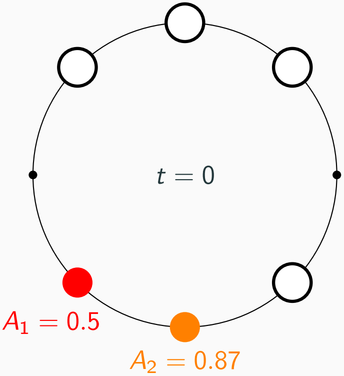
$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

Définition du modèle de golf

- **Une configuration initiale (aléatoire)**



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$$

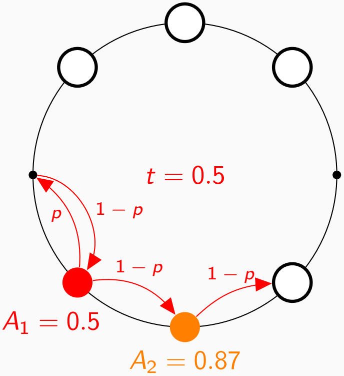
Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\left(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}\right) \sim \text{Unif}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t, n - N_t - N_b}\right)$$

N_t et N_b fixés, avec $N_t \geq N_b$

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- **Une dynamique (aléatoire également)**



N_t trous :

$$T^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$B^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \ldots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$A_v \sim \mathcal{U}([0,1])$$

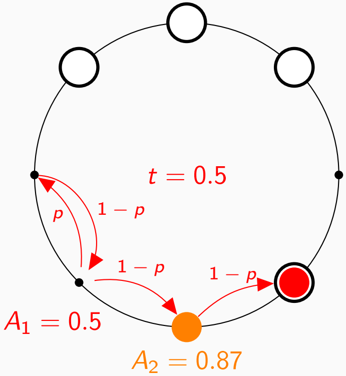
Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\left(B^{init}, T^{init}\right) \sim \mathrm{Unif}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t, n - N_t - N_b}\right)$$

N_t et N_b fixés, avec $N_t \geq N_b$

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- **Une dynamique (aléatoire également)**



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$$

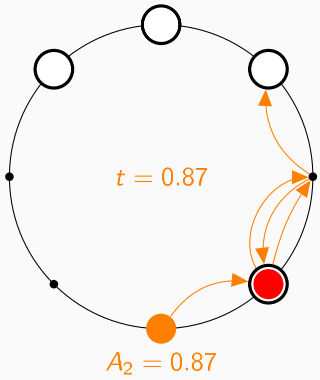
Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\left(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}\right) \sim \text{Unif}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t, n - N_t - N_b}\right)$$

N_t et N_b fixés, avec $N_t \geq N_b$

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- **Une dynamique (aléatoire également)**



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \dots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0,1])$$

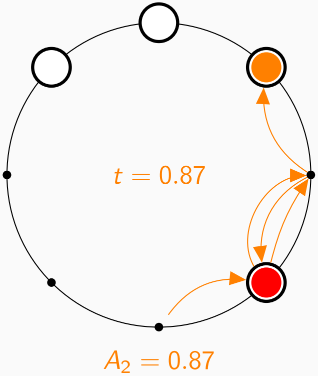
Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: 

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \text{Unif}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t, n - N_t - N_b}\right)$$

N_t et N_b fixés, avec $N_t \geq N_b$

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- **Une dynamique (aléatoire également)**



N_t trous :

$$\boldsymbol{T}^{init} = \{\bigcirc\}$$

N_b balles :

$$\boldsymbol{B}^{init} = \{\bullet, \bullet, \bullet, \ldots\}$$

Une horloge d'activation pour chaque balle :

$$\boldsymbol{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

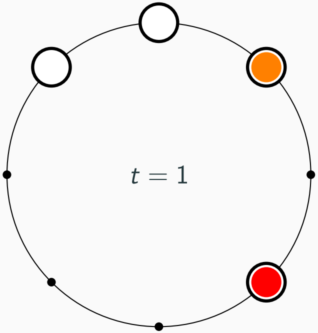
Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$(\boldsymbol{B}^{init}, \boldsymbol{T}^{init}) \sim \text{Unif}\left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t, n - N_t - N_b}\right)$$

N_t et N_b fixés, avec $N_t \geq N_b$

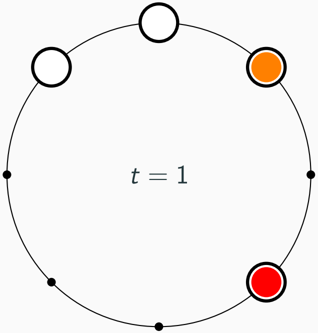
Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- Une dynamique (aléatoire également)
- **Configuration finale**



Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- Une dynamique (aléatoire également)
- **Configuration finale**



Trous résiduels (libres) :

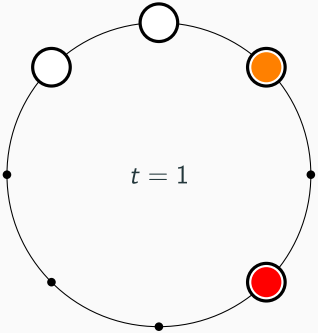
$$T^L = \{\text{positions des } \bigcirc \text{ à } t = 1\}$$

Trous occupés :

$$T^o = \{\underbrace{\text{positions des } \bullet, \bullet, \dots}_{\text{à } t=1}\}$$

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- Une dynamique (aléatoire également)
- **Configuration finale**



Trous résiduels (libres) :

$$\boldsymbol{T^L} = \left\{ \text{positions des} \quad \text{à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

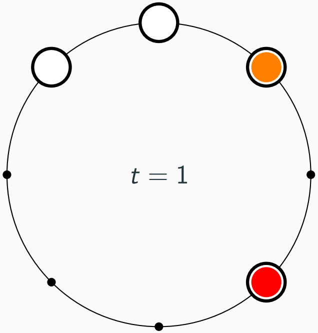
$$\boldsymbol{T^o} = \left\{ \underset{\text{à } t=1}{\text{positions des} \; , \; , \dots} \right\}$$

Proposition

La variable aléatoire $\boldsymbol{T^L}$ est bien définie.

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- Une dynamique (aléatoire également)
- **Configuration finale**



Trous résiduels (libres) :

$$T^L = \left\{ \text{positions des } \bigcirc \text{ à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$T^o = \left\{ \substack{\text{positions des } \bullet, \bullet, \dots \\ \text{à } t=1} \right\}$$

Proposition

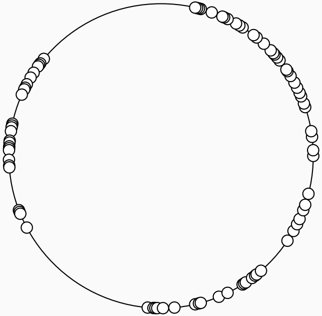
La variable aléatoire T^L est bien définie.

Propriété de commutation (Diaconis-Fulton 91)

La distribution de T^L est indépendante de l'ordre d'activation des balles

Définition du modèle de golf

- Une configuration initiale (aléatoire)
- Une dynamique (aléatoire également)
- **Configuration finale**



Trous résiduels (libres) :

$$\boldsymbol{T^L} = \left\{ \text{positions des } \bigcirc \text{ à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\boldsymbol{T^o} = \left\{ \substack{\text{positions des } \bigcirc, \bigcirc, \dots \\ \text{à } t=1} \right\}$$

Proposition

La variable aléatoire $\boldsymbol{T^L}$ est bien définie.

Propriété de commutation (Diaconis-Fulton 91)

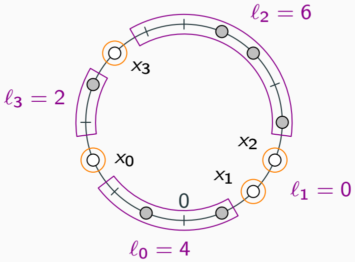
La distribution de $\boldsymbol{T^L}$ est indépendante de l'ordre d'activation des balles

Théorème (Universalité de T^L - V. 25)

Pour tout p,

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(\boldsymbol{T}^L = X\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},n-N_\mathbf{b}-N_\mathbf{t}}} \sum \prod_{i=0}^{N_L-1} \frac{1}{b_i+1}\binom{\ell_i}{b_i,b_i,\ell_i-2b_i}$$

où on somme sur l'ensemble des $(b_i)_{0\le i<N_L}$ tels que $\sum_i b_i = N_\mathrm{b}$ et $\forall i, 2b_i \le \ell_i$.



$X = \{x_0 \ldots, x_{N_L-1}\}$, $N_L = N_\mathrm{t} - N_\mathrm{b}$.

$0 < x_1 < \ldots < x_{N_L-1} < x_0 \le n$

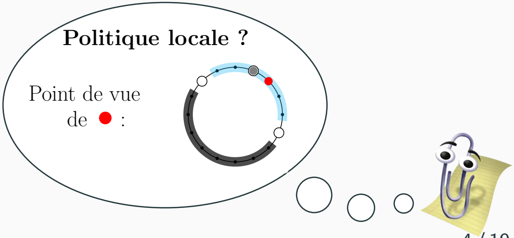
$\forall i,\ \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$

Théorème (Universalité de $\boldsymbol{T^L}$ - V. 25)

***Pour toute politique locale et invariante par rotation**,*

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T^L} = X\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},n-N_{\mathbf{b}}-N_{\mathbf{t}}}} \sum \prod_{i=0}^{N_L-1} \frac{1}{b_i+1} \binom{\ell_i}{b_i,\, b_i,\, \ell_i - 2b_i}$$

où on somme sur l'ensemble des $(b_i)_{0 \leq i < N_L}$ tels que $\sum_i b_i = N_{\mathrm{b}}$ et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.



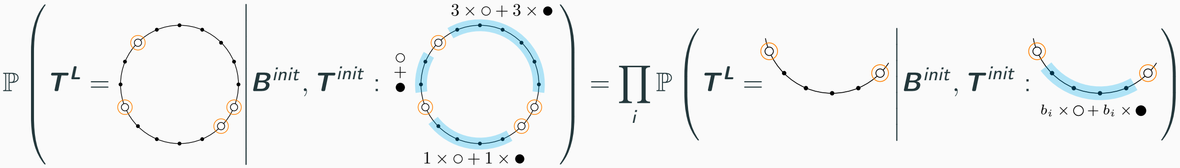
Théorème (Universalité de T^L - V. 25)

Pour toute politique locale et invariante par rotation,

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = X\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},n-N_{\mathbf{b}}-N_{\mathbf{t}}}} \sum \prod_{i=0}^{N_L-1} \frac{1}{b_i+1}\binom{\ell_i}{b_i,\, b_i,\, \ell_i-2b_i}$$

où on somme sur l'ensemble des $(b_i)_{0\leq i<N_L}$ *tels que* $\sum_i b_i = N_{\mathrm{b}}$ *et* $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Idée de la preuve :



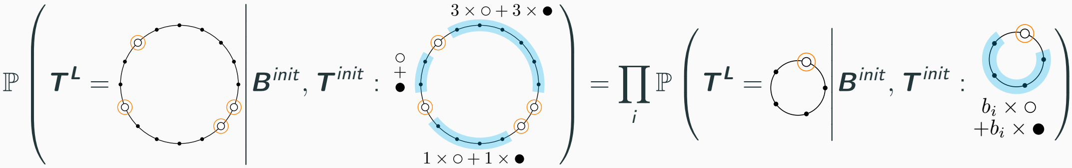
Théorème (Universalité de T^L - V. 25)

Pour toute politique locale et invariante par rotation,

$$\mathbb{P}^{n,N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},p}\left(T^L = X\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_\mathbf{b},N_\mathbf{t},n-N_\mathbf{b}-N_\mathbf{t}}} \sum \prod_{i=0}^{N_L-1} \frac{1}{b_i+1} \binom{\ell_i}{b_i,\, b_i,\, \ell_i - 2b_i}$$

où on somme sur l'ensemble des $(b_i)_{0\leq i<N_L}$ *tels que* $\sum_i b_i = N_\mathrm{b}$ *et* $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

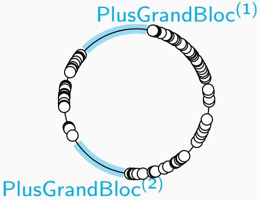
Idée de la preuve :



Analyse de T^L - comportement asymptotique

Pas de sommets neutres : $n = N_t(n) + N_b(n)$. Nombre de trous résiduels (libres à $t = 1$) : $N_L(n) = N_t(n) - N_b(n)$.

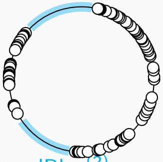
PlusGrandBloc$^{(i)}$ = taille du $i$ème plus grand bloc de $V \setminus \boldsymbol{T}^L$.



Analyse de T^L - comportement asymptotique

Pas de sommets neutres : $n = N_t(n) + N_b(n)$. Nombre de trous résiduels (libres à $t = 1$) : $N_L(n) = N_t(n) - N_b(n)$.

PlusGrandBloc$^{(i)}$ = taille du $i$ème plus grand bloc de $V \setminus \boldsymbol{T}^L$.



Théorème (cas linéaire - V. 25)

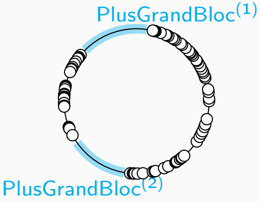
Si $N_L = N_L(n) \sim an$, avec $a > 0$, alors $\exists \alpha, \beta > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\alpha \leq \frac{\text{PlusGrandBloc}^{(1)}}{\log n} \leq \beta\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

Analyse de T^L - comportement asymptotique

Pas de sommets neutres : $n = N_t(n) + N_b(n)$. Nombre de trous résiduels (libres à $t = 1$) : $N_L(n) = N_t(n) - N_b(n)$.

PlusGrandBloc$^{(i)}$ $=$ taille du $i$ème plus grand bloc de $V \backslash \boldsymbol{T}^L$.



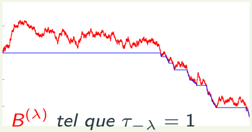
Théorème (cas linéaire - V. 25)

Si $N_L = N_L(n) \sim an$, avec $a > 0$, alors $\exists \alpha, \beta > 0$ tel que

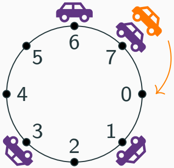
$$\mathbb{P}\left(\alpha \leq \frac{\text{PlusGrandBloc}^{(1)}}{\log n} \leq \beta\right) \underset{n \to \infty}{\to} 1$$

Théorème (transition de phase - V. 25)

- *Si $N_L \ll \sqrt{n}$, alors* $\frac{\text{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
- *Si $N_L \gg \sqrt{n}$, alors* $\frac{\text{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- *Description de la* ***transition de phase*** *: si $N_L/\sqrt{n} \to \lambda \geq 0$,*
  $\left(\frac{\text{PlusGrandBloc}^{(i)}}{n}, i \geq 1\right) \xrightarrow{(d)} \left(\text{PlusGrandesExc}(B^{(\lambda)}), i \geq 1\right)$.



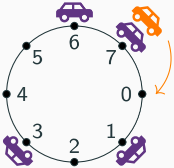
Le modèle de parking :



introduit pour l'étude du
hashage linéaire

Le modèle de parking

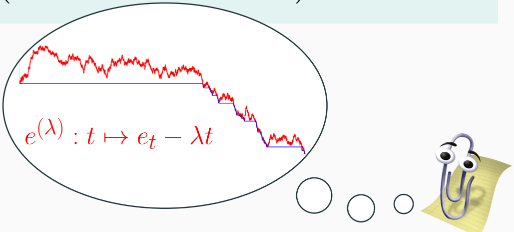
Le modèle de parking :



introduit pour l'étude du hashage linéaire

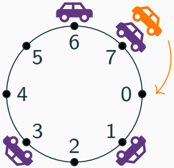
Théorème [Pittel 87, Chassaing-Louchard 02]

- Si $N_L = N_L(n) \sim an$, $a > 0$, alors $\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}$ converge en proba :
$$\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)} = \frac{\log n - 3/2 \log\log n}{a - 1 - \log a} + O(1).$$
- Si $N_L \ll \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
- Si $N_L \gg \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- Description de la **transition de phase** : si $N_L/\sqrt{n} \to \lambda \geq 0$,
$$\left(\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(i)}}{n}, i \geq 1\right) \xrightarrow{(d)} \left(\mathrm{PlusGrandesExc}(e^{(\lambda)}), i \geq 1\right).$$



Le modèle de parking

Le modèle de parking :



introduit pour l'étude du hashage linéaire

Le parking généralisé : politique de déplacement des voitures locale et invariante par rotation (Nadeau 23)

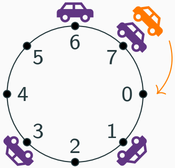
Théorème [Pittel 87, Chassaing-Louchard 02]

- Si $N_L = N_L(n) \sim an$, $a > 0$, alors $\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}$ converge en proba :
$$\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)} = \frac{\log n - 3/2 \log\log n}{a - 1 - \log a} + O(1).$$
- Si $N_L \ll \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
- Si $N_L \gg \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- Description de la **transition de phase** : si $N_L/\sqrt{n} \to \lambda \geq 0$,
$\left(\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(i)}}{n}, i \geq 1\right) \xrightarrow{(d)} \left(\mathrm{PlusGrandesExc}(e^{(\lambda)}), i \geq 1\right)$.

Théorème (V. 25 - Universalité de la loi de T^L pour le parking généralisé)

$$\mathbb{P}^{n, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{t}}, p}\left(T^L = X\right) = \frac{1}{n^{N_{\mathbf{b}}}} \binom{n - N_L}{\ell_1, \ldots, \ell_{N_L}} \prod_{i=1}^{N_L} (\ell_i + 1)^{\ell_i - 1}$$

Le modèle de parking :



introduit pour l'étude du hashage linéaire

Le parking généralisé : politique de déplacement des voitures locale et invariante par rotation (Nadeau 23)

Théorème [Pittel 87, Chassaing-Louchard 02, V. 25 (parking généralisé)]

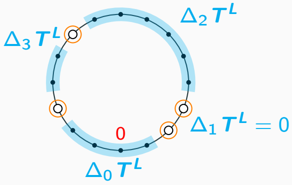
- Si $N_L = N_L(n) \sim an$, $a > 0$, alors PlusGrandBloc$^{(1)}$ converge en proba :
$$\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)} = \frac{\log n - 3/2 \log\log n}{a - 1 - \log a} + O(1).$$
- Si $N_L \ll \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
- Si $N_L \gg \sqrt{n}$, alors $\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(1)}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- Description de la **transition de phase** : si $N_L/\sqrt{n} \to \lambda \geq 0$,
$$\left(\frac{\mathrm{PlusGrandBloc}^{(i)}}{n}, i \geq 1\right) \xrightarrow{(d)} \left(\mathrm{PlusGrandesExc}(e^{(\lambda)}), i \geq 1\right).$$

Théorème (V. 25 - Universalité de la loi de T^L pour le parking généralisé)

$$\mathbb{P}^{n, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{t}}, p}\left(T^L = X\right) = \frac{1}{n^{N_{\mathbf{b}}}} \binom{n - N_L}{\ell_1, \ldots, \ell_{N_L}} \prod_{i=1}^{N_L} (\ell_i + 1)^{\ell_i - 1}$$

Comment obtenir des résultats asymptotiques ?

$\Delta_i \boldsymbol{T^L} =$ taille du $i$ème bloc de $V \setminus \boldsymbol{T^L}$.

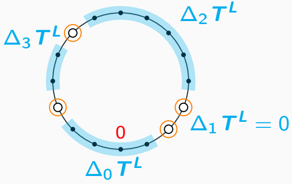


Tailles des blocs quand $n = N_t(n) + N_b(n)$

$$\mathbb{P}^{n, N_\mathbf{b}, N_\mathbf{t}, p}\left(\forall i, \Delta_i \boldsymbol{T^L} = 2b_i\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_\mathbf{b}}}(2b_0 + 1) \prod_{i=0}^{N_L - 1} C_{b_i}$$

Comment obtenir des résultats asymptotiques ?

$\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} =$ taille du $i$ème bloc de $V \backslash \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$.



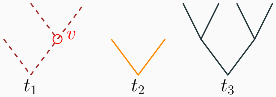
Tailles des blocs quand $n = N_{\mathrm{t}}(n) + N_{\mathrm{b}}(n)$

$$\mathbb{P}^{n, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{t}}, p}\left(\forall i, \Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = 2b_i\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_{\mathbf{b}}}}(2b_0+1)\prod_{i=0}^{N_{\boldsymbol{L}}-1} C_{b_i}$$

De la combinatoire...

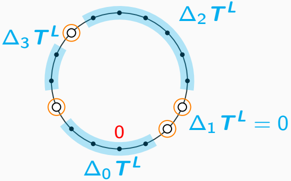
Forests$(n, N_{\boldsymbol{L}})$ = forêts d'arbres binaires à n noeuds et $N_{\boldsymbol{L}}$ racines ;

$\prod_{i=0}^{N_{\boldsymbol{L}}-1} C_{b_i}$ = nombre de forêts telles que le $i$ème arbre a b_i noeuds internes



$\rightarrow$ étude des excursions de $\boldsymbol{p} \sim$ Unif (Paths$(n, N_{\boldsymbol{L}})$) (où Paths$(n, N_{\boldsymbol{L}})$ = chemins tels que $\tau_{-N_{\boldsymbol{L}}} = n$)

Comment obtenir des résultats asymptotiques ?



$\Delta_i\boldsymbol{T^L}$ = taille du $i$ème bloc de $V\backslash\boldsymbol{T^L}$.

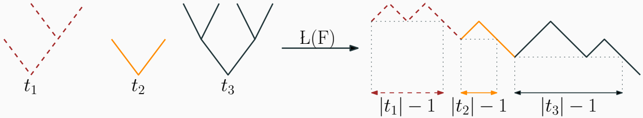
Tailles des blocs quand $n = N_{\mathrm{t}}(n) + N_{\mathrm{b}}(n)$

$$\mathbb{P}^{n,N_{\mathbf{b}},N_{\mathbf{t}},p}\left(\forall i, \Delta_i\boldsymbol{T^L} = 2b_i\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_{\mathbf{b}}}}(2b_0+1)\prod_{i=0}^{N_{\boldsymbol{L}}-1} C_{b_i}$$

De la combinatoire...

Forests$(n, N_{\boldsymbol{L}})$ = forêts d'arbres binaires à n noeuds et $N_{\boldsymbol{L}}$ racines ;

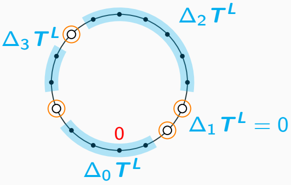
$\prod_{i=0}^{N_{\boldsymbol{L}}-1} C_{b_i}$ = nombre de forêts telles que le $i$ème arbre a b_i noeuds internes



$\to$ étude des excursions de $\boldsymbol{p} \sim$ Unif (Paths$(n, N_{\boldsymbol{L}})$) (où Paths$(n, N_{\boldsymbol{L}})$ = chemins tels que $\tau_{-N_{\boldsymbol{L}}} = n$)

Comment obtenir des résultats asymptotiques ?

$\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$ = taille du $i$ème bloc de $V \setminus \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}$.



Tailles des blocs quand $n = N_{\mathrm{t}}(n) + N_{\mathrm{b}}(n)$

$$\mathbb{P}^{n, N_{\mathbf{b}}, N_{\mathbf{t}}, p}\left(\forall i, \Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = 2b_i\right) = \frac{1}{\binom{n}{N_{\mathbf{b}}}}(2b_0+1)\prod_{i=0}^{N_{\boldsymbol{L}}-1} C_{b_i}$$

...et des probas : si $\boldsymbol{p} \sim \mathcal{U}(\mathrm{Paths}(n, N_{\boldsymbol{L}}))$, alors

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}(2nt)}{\sqrt{2n}}\right)_{t\in[0,1]} \xrightarrow{(d)} B^{(\lambda)},$$

dans $(C([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$, où $B^{(\lambda)}$ est un mouvement brownien B conditionné par $\tau_{-\lambda}(B) = 1$.

Et pour tout k, les k plus grandes longueurs d'excursions de $\boldsymbol{p}$, normalisées, convergent vers celles de $B^{(\lambda)}$ (lemme d'Aldous).

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ - Définition

Configuration initiale pour tout sommet u, indépendamment des autres sommets :

- état initial : balle avec proba d_{b} OU trou avec proba d_{t}, $0 \leq d_{\mathrm{b}} \leq d_{\mathrm{t}}$
- horloge d'activation : $\boldsymbol{A}_u \sim \mathcal{U}\left([0,1]\right)$

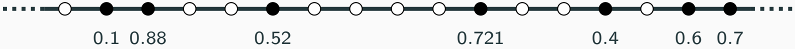
À son activation, une balle réalise une marche aléatoire de paramètre p jusqu'à atteindre un trou libre.

Le modèle est-il bien défini ? Est-ce que chaque balle trouve un trou ?

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ - Définition

Configuration initiale pour tout sommet u, indépendamment des autres sommets :

- état initial : balle avec proba d_{b} OU trou avec proba d_{t}, $0 \leq d_{\mathsf{b}} \leq d_{\mathsf{t}}$
- horloge d'activation : $\boldsymbol{A}_u \sim \mathcal{U}([0,1])$



À son activation, une balle réalise une marche aléatoire de paramètre p jusqu'à atteindre un trou libre.

Le modèle est-il bien défini ? Est-ce que chaque balle trouve un trou ?

Théorème (V. 25)

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini (y compris pour $d_{\mathsf{b}} = d_{\mathsf{t}}$).

$\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ = processus des tailles des blocs. Supp. que $d_b + d_t = 1$.

Théorème (V. 25)

- *Si $d_b < d_t$: il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ et λ (explicites) tels que, pour tout $R > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = 2b_i, -R \leq i \leq R\right) = \frac{(2b_0+1)\lambda^{2b_0} C_{b_0}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i\neq 0}^{R} \frac{\lambda^{2b_i} C_{b_i}}{\mathcal{G}(\lambda)}$$

- *Si $d_b = d_t$, alors presque sûrement, $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = \emptyset$.*

$\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^L\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ = processus des tailles des blocs. Supp. que $d_b + d_t = 1$.

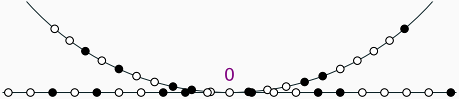
Théorème (V. 25)

- *Si $d_b < d_t$: il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ et λ (explicites) tels que, pour tout $R > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^L = 2b_i, -R \leq i \leq R\right) = \frac{(2b_0+1)\lambda^{2b_0} C_{b_0}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i\neq 0}^{R} \frac{\lambda^{2b_i} C_{b_i}}{\mathcal{G}(\lambda)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{L(n)} = 2b_i, -R \leq i \leq R\right)$$

- *Si $d_b = d_t$, alors presque sûrement, $\boldsymbol{T}^L = \emptyset$.*

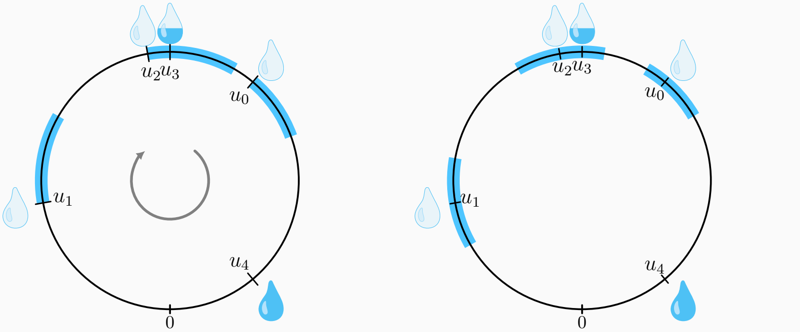
Clé : couplage avec le golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



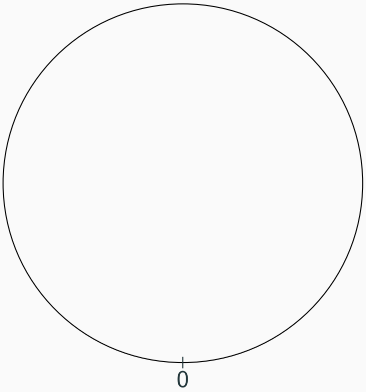
$\frac{N_b(n)}{n} \to d_b$, $\frac{N_t(n)}{n} \to d_t$
environnement local : similaire + suffisant

Modèles continus (et discrets) de dispersion

(avec Jean-François Marckert)

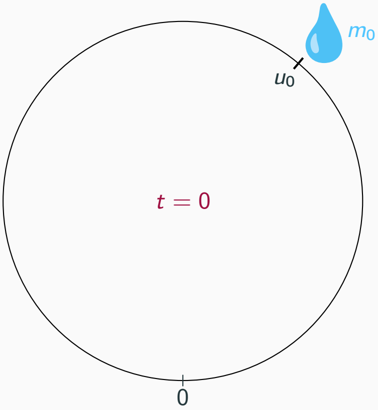


Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

Définition du modèle

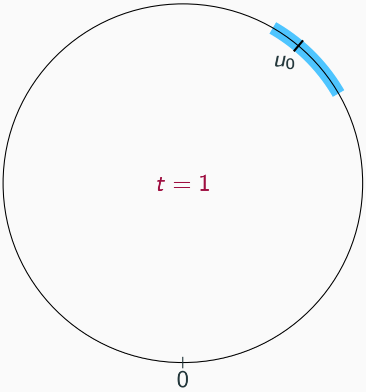


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$

Définition du modèle

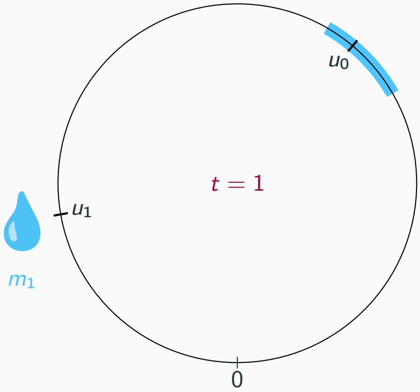


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k **:**

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Définition du modèle

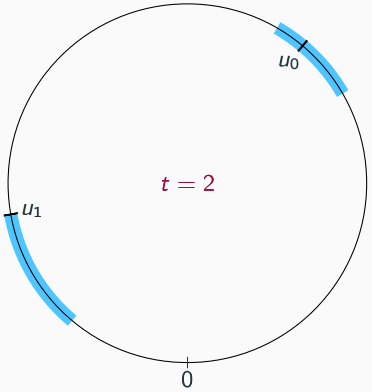


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Définition du modèle

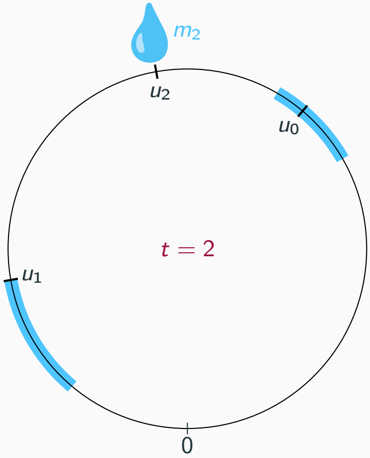


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Définition du modèle

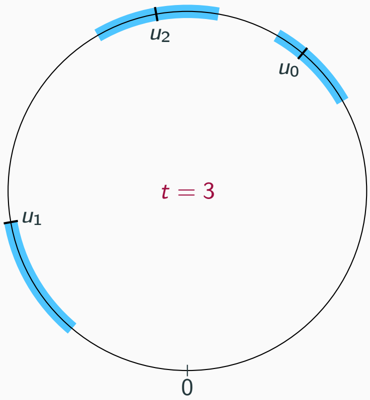


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

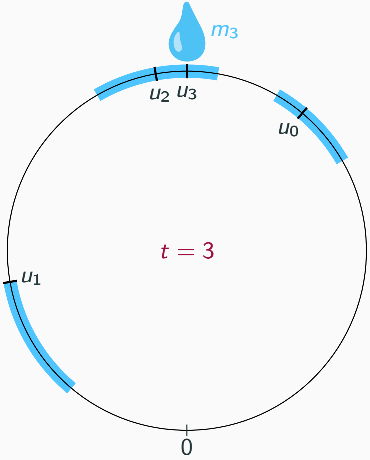
Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

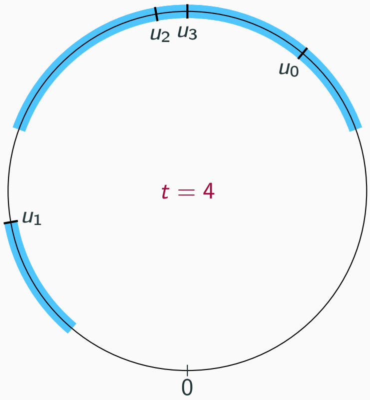


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Définition du modèle

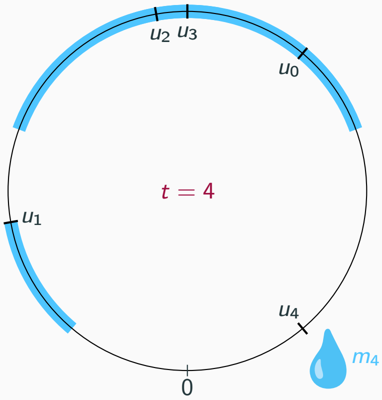


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

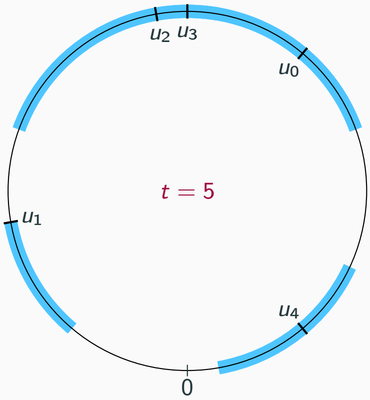
Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

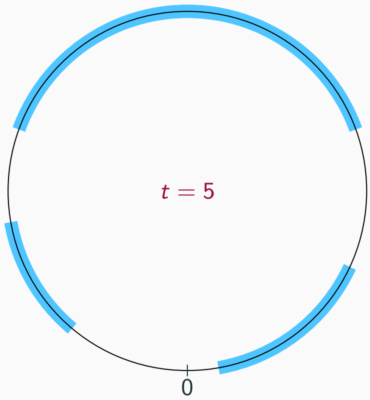


Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

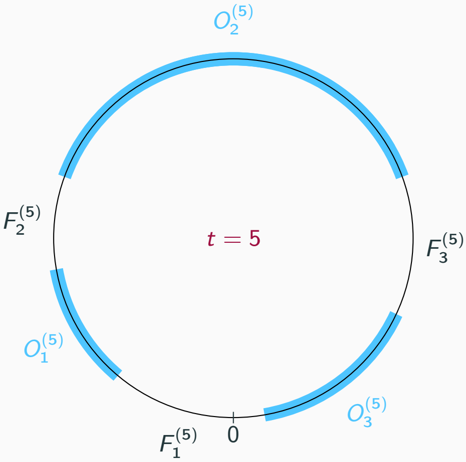
À l'étape k :

- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Configuration au temps k (i.e. après étalement de la goutte $k-1$) :

- **espace occupé** $O^{(k)}$
- **espace libre** $F^{(k)} = \mathcal{C} \backslash O^{(k)}$

Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k **:**

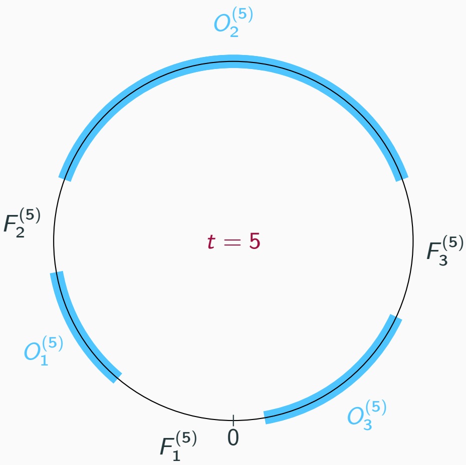
- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Configuration au temps k (i.e. après étalement de la goutte $k-1$) :

- **espace occupé** $O^{(k)}$
- **espace libre** $F^{(k)} = \mathcal{C} \backslash O^{(k)}$
- plus précisément, $N^{(k)}$ **blocs** de chaque type

$\Longrightarrow$ $(O_i^{(k)}, F_i^{(k)})_{1 \leq i \leq N^{(k)}}$ avec $0 \in O_1^{(k)} \cup F_1^{(k)}$

Définition du modèle



Modèle défini sur $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $m_0, \cdots, m_n$ où $\sum m_i < 1$.

À l'étape k :

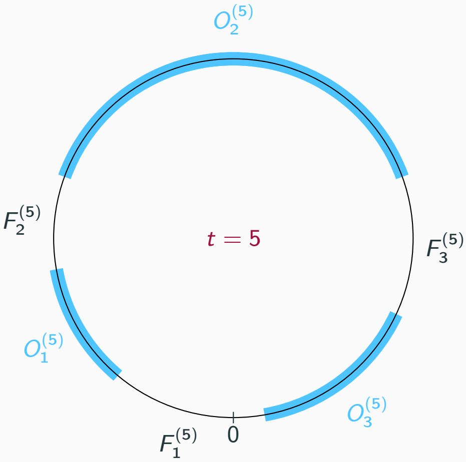
- arrivée d'une goutte de taille m_k en $u_k \sim \mathcal{U}(\mathcal{C})$
- étalement continu de la goutte (la nouvelle zone couverte est de taille m_k) entre le temps k et le temps $k + m_k$

Configuration au temps k (i.e. après étalement de la goutte $k-1$) :

- **espace occupé** $O^{(k)}$
- **espace libre** $F^{(k)} = \mathcal{C} \backslash O^{(k)}$
- plus précisément, $N^{(k)}$ **blocs** de chaque type

$\Longrightarrow$ $(O_i^{(k)}, F_i^{(k)})_{1 \le i \le N^{(k)}}$ avec $0 \in O_1^{(k)} \cup F_1^{(k)}$

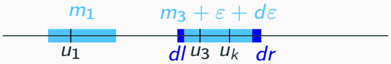
Définition du modèle



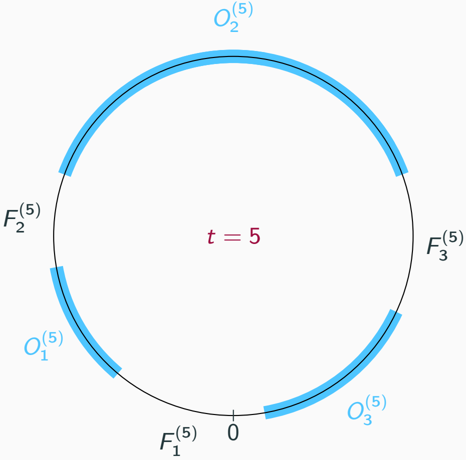
Hypothèses de validité pendant la phase d'étalement :

- étalement continu :

$$t = k + \varepsilon + d\varepsilon \qquad dl + dr = d\varepsilon$$



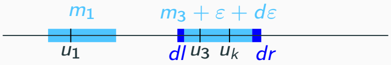
- étalement local : dl et dr dépendent uniquement de la composante connexe contenant u_k (une des $O_i^{(k+\varepsilon)}$)
- processus invariant par translation



Hypothèses de validité pendant la phase d'étalement :

- étalement continu :

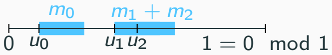
$$t = k + \varepsilon + d\varepsilon \qquad dl + dr = d\varepsilon$$



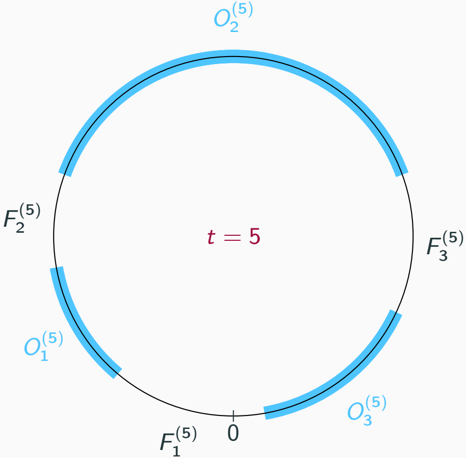
- étalement local : dl et dr dépendent uniquement de la composante connexe contenant u_k (une des $O_i^{(k+\varepsilon)}$)
- processus invariant par translation

Exemples d'étalement continu :

- **Diffusion à droite :** $\overrightarrow{O^{(k)}}, \overrightarrow{F^{(k)}}$



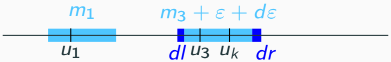
Définition du modèle



Hypothèses de validité pendant la phase d'étalement :

- étalement continu :

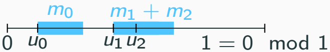
$t = k + \varepsilon + d\varepsilon$ $\qquad$ $dl + dr = d\varepsilon$



- étalement local : dl et dr dépendent uniquement de la composante connexe contenant u_k (une des $O_i^{(k+\varepsilon)}$)
- processus invariant par translation

Exemples d'étalement continu :

- **Diffusion à droite :** $\overrightarrow{O^{(k)}}, \overrightarrow{F^{(k)}}$



- Diffusion d'une proportion p à droite, $1 - p$ à gauche
- "tartineur de confiture nocturne" 

Résultats d'universalité

Masses fixées : $m_0, \cdots, m_{k-1}$ où $\sum m_i < 1$.

Espace libre de taille $R = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

Théorème (Marckert, V. 25+)

Indépendamment de la politique de diffusion,

- ***Nombre de blocs :***
- ***Longueur des blocs libres :***
- ***Longueur des blocs occupés :***

Résultats d'universalité

Masses fixées : $m_0, \cdots, m_{k-1}$ où $\sum m_i < 1$.

Espace libre de taille $R = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

Théorème (Marckert, V. 25+)

Indépendamment de la politique de diffusion,

- ***Nombre de blocs :*** $N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \mathrm{Binomial}(k-1, R)$
- ***Longueur des blocs libres :*** $\frac{\sigma.|F^{(k)}|}{R} \sim \mathrm{Dirichlet}(N^{(k)}; 1, \ldots, 1)$
- ***Longueur des blocs occupés :*** *une formule pour* $\mathbb{P}\left(|O^{(k)}| = (M_0, \ldots, M_{b-1})\right)$

Résultats d'universalité

Masses fixées : $m_0, \cdots, m_{k-1}$ où $\sum m_i < 1$.

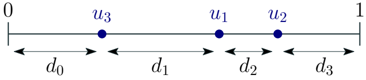
Espace libre de taille $R = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

Théorème (Marckert, V. 25+)

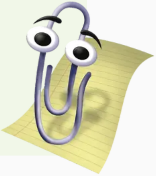
***Indépendamment de la politique de diffusion**,*

- ***Nombre de blocs :*** $N^{(k)} \stackrel{(d)}{=} 1 + \mathrm{Binomial}(k-1, R)$
- ***Longueur des blocs libres :*** $\frac{\sigma.|F^{(k)}|}{R} \sim \mathrm{Dirichlet}(N^{(k)}; 1, \dots, 1)$
- ***Longueur des blocs occupés :*** *une formule pour* $\mathbb{P}\left(|O^{(k)}| = (M_0, \dots, M_{b-1})\right)$

$u_1, u_2, u_3 \sim \mathcal{U}([0,1])$



$(d_0, \dots, d_3) \sim \mathrm{Dirichlet}(4; 1, \dots, 1)$



Résultats d'universalité

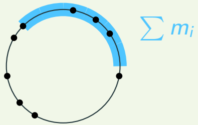
Masses fixées : $m_0, \cdots, m_{k-1}$ où $\sum m_i < 1$.

Espace libre de taille $R = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

Théorème (Marckert, V. 25+)

Indépendamment de la politique de diffusion,

- ***Nombre de blocs :*** $N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$
- ***Longueur des blocs libres :*** $\frac{\sigma.|F^{(k)}|}{R} \sim \text{Dirichlet}(N^{(k)}; 1, \ldots, 1)$
- ***Longueur des blocs occupés :*** *une formule pour* $\mathbb{P}\left(|O^{(k)}| = (M_0, \ldots, M_{b-1})\right)$
- $\mathcal{L}\left(|F^{(k)}| \,\middle|\, (m_0, \cdots, m_{k-1})\right) = \mathcal{L}\left(|\overrightarrow{F^{(k)}}| \,\middle|\, (\sum m_i, 0, \cdots, 0)\right)$



Résultats d'universalité

Masses fixées : $m_0, \cdots, m_{k-1}$ où $\sum m_i < 1$.

Espace libre de taille $R = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_i$.

Théorème (Marckert, V. 25+)

Indépendamment de la politique de diffusion,

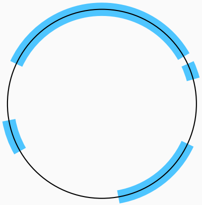
- ***Nombre de blocs :*** $N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \mathrm{Binomial}(k-1, R)$
- ***Longueur des blocs libres :*** $\frac{\sigma.|F^{(k)}|}{R} \sim \mathrm{Dirichlet}(N^{(k)}; 1, \ldots, 1)$
- ***Longueur des blocs occupés :*** *une formule pour* $\mathbb{P}\left(|O^{(k)}| = (M_0, \ldots, M_{b-1})\right)$
- $\mathcal{L}\left(|F^{(k)}| \,\middle|\, (m_0, \cdots, m_{k-1})\right) = \mathcal{L}\left(|\overrightarrow{F^{(k)}}| \,\middle|\, (\sum m_i, 0, \cdots, 0)\right)$

En tant que processus en k*, on connait aussi, indépendamment de la politique de diffusion :*

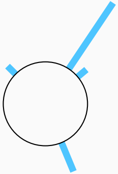
- $\mathcal{L}(N^{(k)}, k \geq 0)$
- $\mathcal{L}(\{\{|O^{(k)}|\}\}, k \geq 0)$

Principe de la preuve

Représentation alternative : les pics



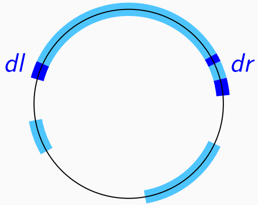
$\longleftrightarrow$



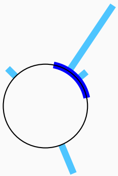
$\longleftrightarrow$

Principe de la preuve

Représentation alternative : les pics



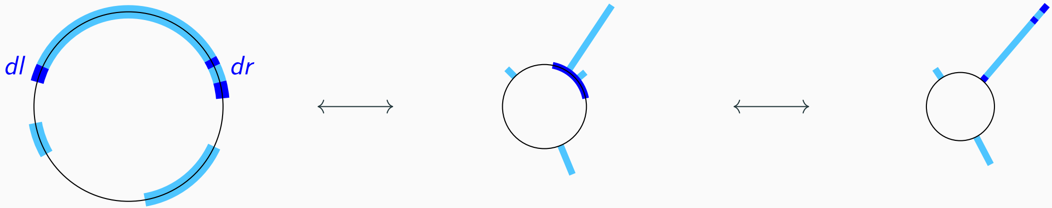
$\longleftrightarrow$



$\longleftrightarrow$

Principe de la preuve

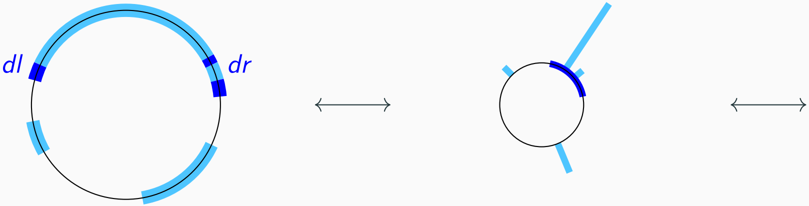
Représentation alternative : les pics



Principe de la preuve

- Des **propriétés invariantes** tout au long de l'étalement :
  - les positions des pics sont uniformes sur le cercle de taille $R = 1 - \sum m_i$
  - lorsqu'on étale "depuis un pic", la probabilité de rencontrer d'autres pics dépend uniquement de la quantité étalée

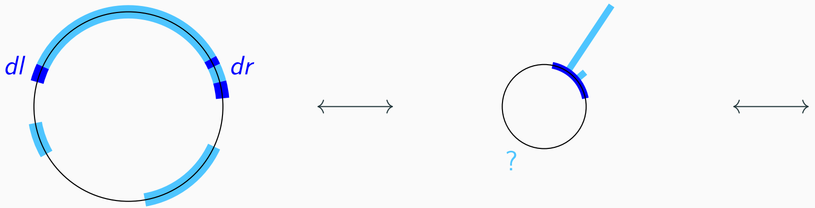
Représentation alternative : les pics



Principe de la preuve

- Des **propriétés invariantes** tout au long de l'étalement :
  - les positions des pics sont uniformes sur le cercle de taille $R = 1 - \sum m_i$
  - lorsqu'on étale "depuis un pic", la probabilité de rencontrer d'autres pics dépend uniquement de la quantité étalée

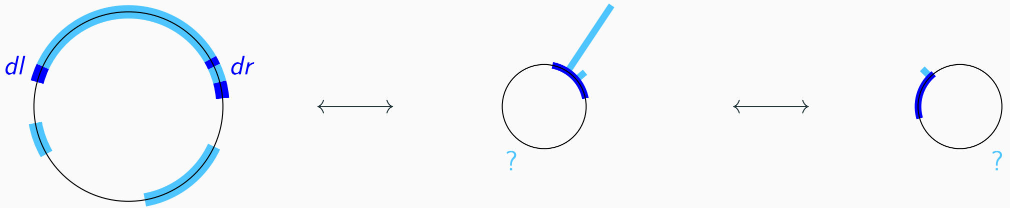
Représentation alternative : les pics



Principe de la preuve

- Des **propriétés invariantes** tout au long de l'étalement :
  - les positions des pics sont uniformes sur le cercle de taille $R = 1 - \sum m_i$
  - lorsqu'on étale "depuis un pic", la probabilité de rencontrer d'autres pics dépend uniquement de la quantité étalée

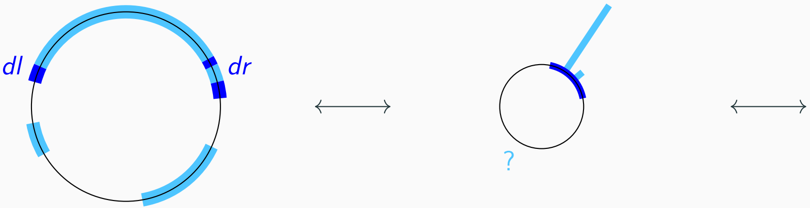
Représentation alternative : les pics



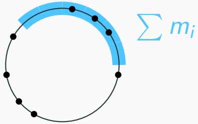
Principe de la preuve

- Des **propriétés invariantes** tout au long de l'étalement :
  - les positions des pics sont uniformes sur le cercle de taille $R = 1 - \sum m_i$
  - lorsqu'on étale “depuis un pic”, la probabilité de rencontrer d'autres pics dépend uniquement de la quantité étalée

Représentation alternative : les pics



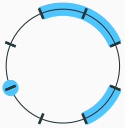
Conclusion : $N^{(k)} \stackrel{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$



Version discrète

Discrétisation de la définition sur $\mathcal{C}_n := \{0/n, \cdots, (n-1)/n\} \subset \mathcal{C}$:

- les gouttes arrivent sur $\mathcal{C}_n$: $\forall i, u_i \sim \mathcal{U}(\mathcal{C}_n)$
- et recouvrent des intervalles dont les extrémités appartiennent à $\mathcal{C}_n$
- politique de dispersion valide : invariante par rotation $1/n$ seulement (et toujours locale)



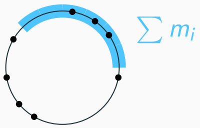
Théorème (Universalité des modèles discrets - Marckert-V. 25+)

*Les distributions suivantes sont explicites et **indépendantes de la politique de diffusion** :*

- *À k fixé :*
  - $\mathcal{L}(O^{(k)}, F^{(k)})$
  - $\mathcal{L}\left(|F^{(k)}| \;\middle|\; (m_0, \cdots, m_{k-1})\right) = \mathcal{L}\left(|\overrightarrow{F^{(k)}}| \;\middle|\; (\sum m_i, 0, \cdots, 0)\right)$
- *En tant que processus en k :*
  - $\mathcal{L}(N^{(k)}, k \geq 0)$
  - $\mathcal{L}(\{\{|O^{(k)}|\}\}, k \geq 0)$

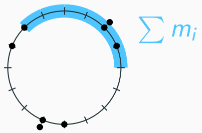
Comparaison des modèles continus et discrets

Version continue :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$$

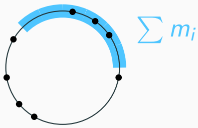
Version discrète :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \dots$$

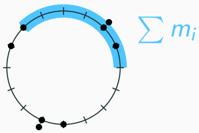
Comparaison des modèles continus et discrets

Version continue :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$$

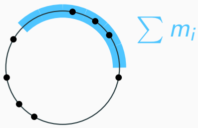
Version discrète :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R-1/n)$$

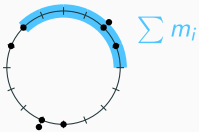
Comparaison des modèles continus et discrets

Version continue :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \mathrm{Binomial}(k-1, R)$$

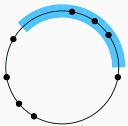
Version discrète :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \mathrm{NbDiff}(\mathrm{Binomial}(k-1, R-1/n))$$

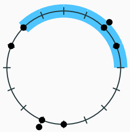
Comparaison des modèles continus et discrets

Version continue :



$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$

Version discrète :



$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{NbDiff}(\text{Binomial}(k-1, R-1/n))$

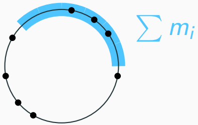
Comportement asymptotique quand $k = n - \lambda\sqrt{n}$ et $\forall i, m_i = 1/n$

Nombre de blocs : $\frac{N_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda$

Nombre de blocs : $\frac{N_k^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda(1-e^{-1})$

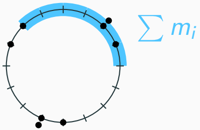
Comparaison des modèles continus et discrets

Version continue :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{Binomial}(k-1, R)$$

Version discrète :



$$N^{(k)} \overset{(d)}{=} 1 + \text{NbDiff}(\text{Binomial}(k-1, R-1/n))$$

Comportement asymptotique quand $k = n - \lambda\sqrt{n}$ et $\forall i, m_i = 1/n$

Nombre de blocs : $\frac{N_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda$

Nombre de blocs : $\frac{N_k^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda(1-e^{-1})$

Tailles des plus grands blocs (Bertoin-Miermont 06, Chassaing-Louchard 02) :

$$\left(\frac{\text{PlusGrandBloc}^{(\mathbf{i})}}{n}, 1 \leq i \leq j\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} (\text{PlusGrandesExc}(e^{(\lambda)})_i, 1 \leq i \leq j)$$

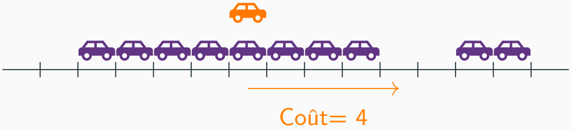
Coût asymptotique des modèles discrets

$$\text{CoûtGlobal}_n(r) = \sum_{i=1}^{r} \text{coût pour garer la voiture } i$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Coût}^i_{t_i}, \text{ où } t_i \text{ taille du bloc dans lequel tombe la voiture } i$$

Deux objets importants

- la liste t_i
- $\mathbb{E}\left[\text{Coût}^{\cdot}_{\ell}\right]$ et $\text{Var}\left(\text{Coût}^{\cdot}_{\ell}\right)$

Coût du parking classique : $\text{Coût}^{\cdot}_{\ell} \sim \text{Unif}\left(\llbracket 1, \ell \rrbracket\right)$



Coût asymptotique des modèles discrets

$$\text{CoûtGlobal}_n(r) = \sum_{i=1}^{r} \text{coût pour garer la voiture } i$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Coût}_{t_i}^{i}, \text{ où } t_i \text{ taille du bloc dans lequel tombe la voiture } i$$

Deux objets importants

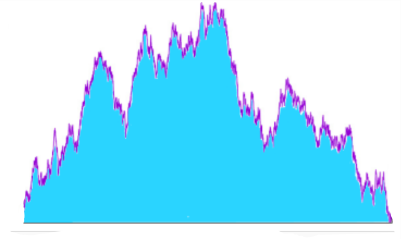
- la liste t_i
- $\mathbb{E}\left[\text{Coût}_\ell^{\cdot}\right]$ et $\text{Var}\left(\text{Coût}_\ell^{\cdot}\right)$

Coût du parking classique : Coût$_\ell^{\cdot} \sim \text{Unif}\left([\![1, \ell]\!]\right)$

Si $r = n$, (Flajolet-Poblete-Viola 98)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e_t \, dt$$

Illustration de $\int_0^1 e_t \, dt$:



Coût asymptotique des modèles discrets

$$\text{CoûtGlobal}_n(r) = \sum_{i=1}^{r} \text{coût pour garer la voiture } i$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Coût}^i_{t_i}, \text{ où } t_i \text{ taille du bloc dans lequel tombe la voiture } i$$

Deux objets importants

- la liste t_i
- $\mathbb{E}\left[\text{Coût}^\cdot_\ell\right]$ et $\text{Var}\left(\text{Coût}^\cdot_\ell\right)$

Coût du parking classique : Coût$^\cdot_\ell \sim \text{Unif}\left(\llbracket 1, \ell \rrbracket\right)$

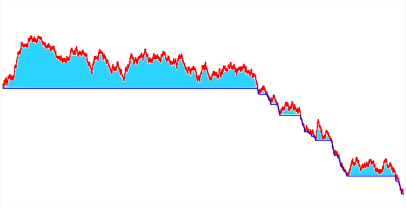
Si $r = n$, (Flajolet-Poblete-Viola 98)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e_t dt$$

Si $r = \lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor$, (Chassaing-Louchard 02)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e^{(\lambda)}(t) - \inf_{s\le t} e^{(\lambda)}(s)dt =: F(\lambda)$$

Illustration de $\int_0^1 e^{(\lambda)}(t) - \inf_{s\le t} e^{(\lambda)}(s)dt$:



Coût asymptotique des modèles discrets

$$\text{CoûtGlobal}_n(r) = \sum_{i=1}^{r} \text{coût pour garer la voiture } i$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Coût}^i_{t_i}, \text{ où } t_i \text{ taille du bloc dans lequel tombe la voiture } i$$

Deux objets importants

- la liste t_i
- $\mathbb{E}\left[\text{Coût}^{\cdot}_{\ell}\right]$ et $\text{Var}\left(\text{Coût}^{\cdot}_{\ell}\right)$

Coût du parking classique : $\text{Coût}^{\cdot}_{\ell} \sim \text{Unif}\left(\llbracket 1, \ell \rrbracket\right)$

Si $r = n$, (Flajolet-Poblete-Viola 98)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e_t dt$$

Si $r = \lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor$, (Chassaing-Louchard 02)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e^{(\lambda)}(t) - \inf_{s\le t} e^{(\lambda)}(s)dt =: F(\lambda)$$

Théorème (Marckert-V.25+)

Convergence en loi de

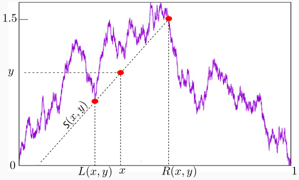
$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n\left(\lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor\right)}{\sqrt{n}\alpha_n}$$

sous des hypothèses dépendant de $\mathbb{E}\left[\text{Coût}_k\right]$ et $\text{Var}\left(\text{Coût}_k\right)$, vers une limite explicite

Coût asymptotique des modèles discrets

$$\text{CoûtGlobal}_n(r) = \sum_{i=1}^{r} \text{coût pour garer la voiture } i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \text{Coût}^{i}_{t_i}, \text{ où } t_i \text{ taille du bloc dans lequel tombe la voiture } i$$



Coût du parking classique : $\text{Coût}_\ell \sim \text{Unif}\,(\llbracket 1, \ell \rrbracket)$

Si $r = n$, (Flajolet-Poblete-Viola 98)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e_t\,dt$$

Si $r = \lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor$, (Chassaing-Louchard 02)

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(r)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int_0^1 e^{(\lambda)}(t) - \inf_{s\le t} e^{(\lambda)}(s)\,dt =: F(\lambda)$$

Cas des marches aléatoires de paramètre p

Si $p \neq 1/2$,

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(\lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \frac{1}{|2p-1|} F(\lambda)$$

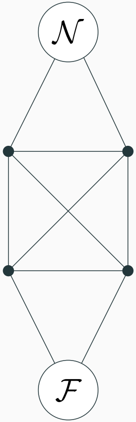
Si $p = 1/2$,

$$\frac{\text{CoûtGlobal}_n(\lfloor n - \lambda\sqrt{n} \rfloor)}{n^{5/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \frac{1}{3} G(\lambda)$$

où $G(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{e_x} (R(x,y) - L(x,y)) \mathbb{1}_{S(x,y)\ge\lambda}\, dy dx$

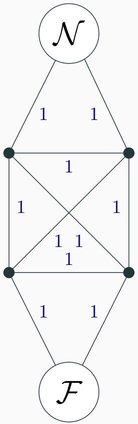
Les fourmis : un modèle d'apprentissage par renforcement (avec Cécile Mailler)

Définition du modèle



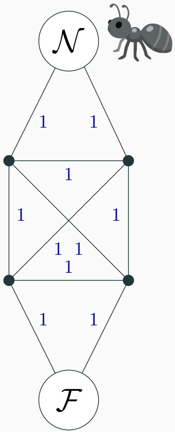
À chaque étape n :

Définition du modèle



À chaque étape n :

Définition du modèle



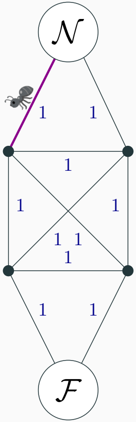
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e : u \in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



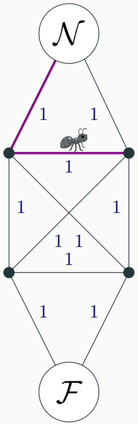
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



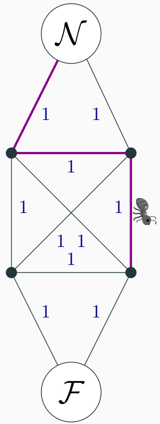
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



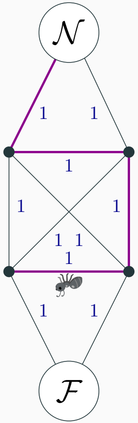
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}\left(u \to v\right) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



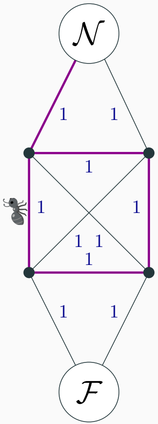
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



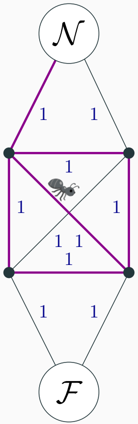
À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e : u \in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



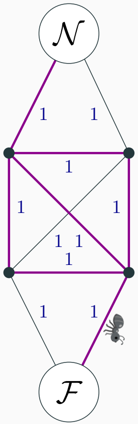
À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle



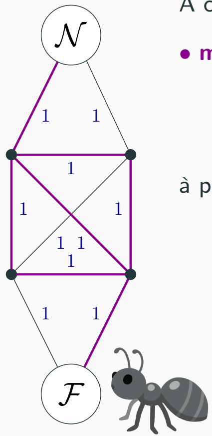
À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e : u \in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

Définition du modèle

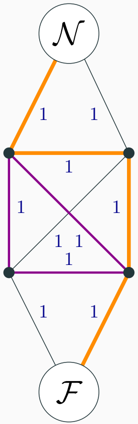


À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$



À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

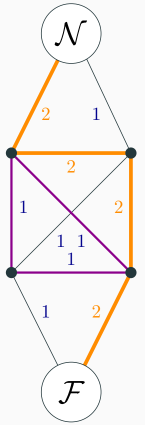
$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

$$\forall e,\, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) :
$\gamma = LE(X)$



À chaque étape n :

- **marche aléatoire** X pondérée par $W(n)$:

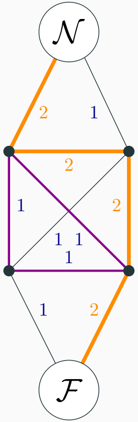
$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) :
$\gamma = LE(X)$



À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

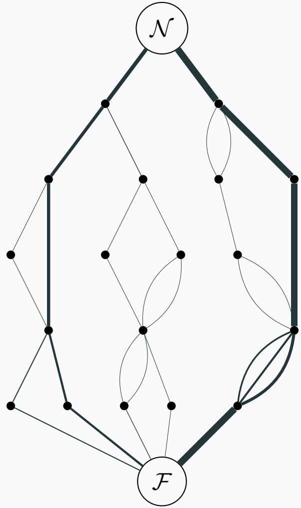
$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

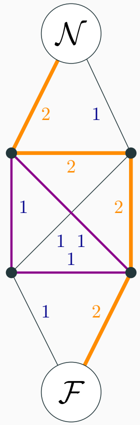
$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) :
$\gamma = LE(X)$



Simulations pour $n = 10^8$

Définition du modèle



À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

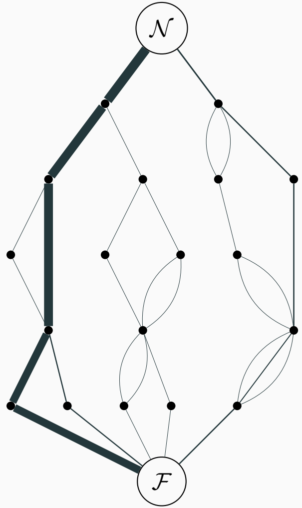
$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

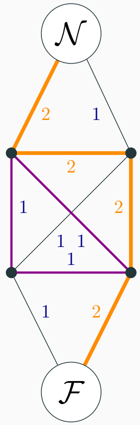
$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) :
$\gamma = LE(X)$



Simulations pour $n = 10^8$

Définition du modèle



À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

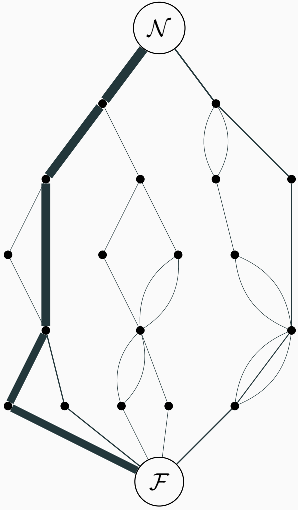
à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

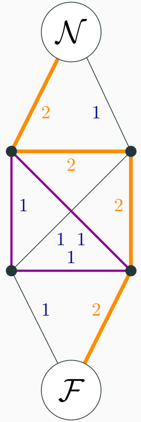
$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) :
$\gamma = LE(X)$

Question : Est ce que les fourmis trouvent un (ou des) plus court(s) chemin(s) de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{F}$?
Est-ce que $\left(\frac{W_e(n)}{n}\right)_e$ converge ?



Simulations pour $n = 10^8$



À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) : $\gamma = LE(X)$

Question : Est ce que les fourmis trouvent un (ou des) plus court(s) chemin(s) de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{F}$? Est-ce que $\left(\frac{W_e(n)}{n}\right)_e$ converge ?

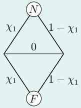
Théorème (Kious, Mailler, Schapira 2022)

Réponse : Oui, parfois

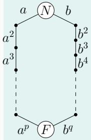
- Si G est un graphe séries-parallèles

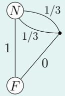
Pour d'autres modèles de renforcement :

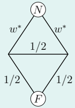
- Si $\gamma = X$ et G *tree-like*
- Si γ chemin de long. min. dans X et G est un losange



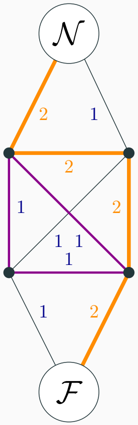
Mais : pas toujours des plus courts chemins, quand $\gamma = X$







Définition du modèle



À chaque étape n :

- **marche aléatoire X** pondérée par $W(n)$:

$$\mathbb{P}(u \to v) = \frac{W_{uv}(n)}{\sum_{e:u\in e} W_e(n)}$$

à partir de $\mathcal{N}$, stoppée lorsqu'elle atteint $\mathcal{F}$

- **dépôt de phéromones** sur γ :

$$\forall e, W_e(n+1) = W_e(n) + \mathbb{1}_{e\in\gamma}$$

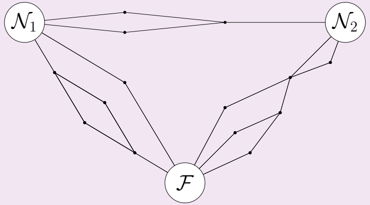
Modèle à boucles effacées (LE=*loop-erased*) : $\gamma = LE(X)$

Question : Est ce que les fourmis trouvent un (ou des) plus court(s) chemin(s) de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{F}$? Est-ce que $\left(\frac{W_e(n)}{n}\right)_e$ converge ?

Modèle à deux nids

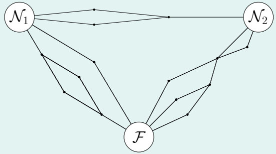
À chaque étape n,

$$\mathcal{N}(n) = \begin{cases} \mathcal{N}_1 & \text{avec proba } \alpha \in (0,1), \\ \mathcal{N}_2 & \text{avec proba } 1-\alpha. \end{cases}$$



Résultat principal sur le modèle à deux nids

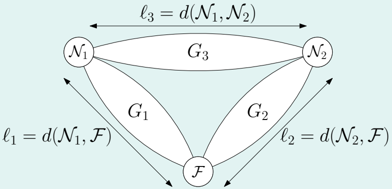
Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

Résultat principal sur le modèle à deux nids

Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

Résultat principal sur le modèle à deux nids

$N_i(n)$ = nombre de chemins renforcés dans G_i jusqu'à l'étape n

Théorème (Mailler, V. 25+)

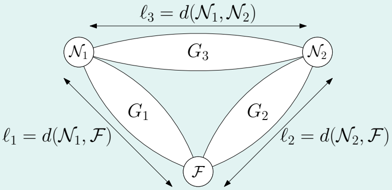
Presque sûrement,

$$\left(\frac{N_1(n)}{n}, \frac{N_2(n)}{n}, \frac{N_3(n)}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$$

Si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors,

- *si $\ell_2 \geq \ell_1 + \ell_3$, alors $w = (1, 0, 1-\alpha)$,*
- *si $\ell_3 \geq \ell_1 + \ell_2$, alors $w = (\alpha, 1-\alpha, 0)$,*
- *sinon $w = (\beta_1, 1-\beta_1, \beta_3)$.*

Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

Résultat principal sur le modèle à deux nids

$N_i(n)$ = nombre de chemins renforcés dans G_i jusqu'à l'étape n

Théorème (Mailler, V. 25+)

Presque sûrement,

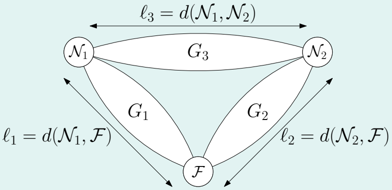
$$\left(\frac{N_1(n)}{n}, \frac{N_2(n)}{n}, \frac{N_3(n)}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$$

Si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors,

- *si $\ell_2 \geq \ell_1 + \ell_3$, alors $w = (1, 0, 1-\alpha)$,*
- *si $\ell_3 \geq \ell_1 + \ell_2$, alors $w = (\alpha, 1-\alpha, 0)$,*
- *sinon $w = (\beta_1, 1-\beta_1, \beta_3)$.*

Et, presque sûrement, $\forall e \in G_i$, $\frac{W_e(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_e$ (aléatoire), où $\xi_e \neq 0 \iff \lim N_i(n)/n > 0$ et e appartient à un plus court chemin entre deux sommets de $\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{F}\}$.

Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

Résultat principal sur le modèle à deux nids

$N_i(n)$ = nombre de chemins renforcés dans G_i jusqu'à l'étape n

Théorème (Mailler, V. 25+)

Presque sûrement,

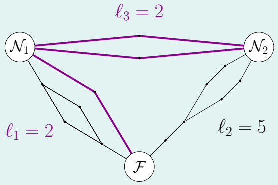
$$\left(\frac{N_1(n)}{n}, \frac{N_2(n)}{n}, \frac{N_3(n)}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$$

Si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors,

- *si $\ell_2 \geq \ell_1 + \ell_3$, alors $w = (1, 0, 1-\alpha)$,*
- *si $\ell_3 \geq \ell_1 + \ell_2$, alors $w = (\alpha, 1-\alpha, 0)$,*
- *sinon $w = (\beta_1, 1-\beta_1, \beta_3)$.*

Et, presque sûrement, $\forall e \in G_i$, $\frac{W_e(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_e$ (aléatoire), où $\xi_e \neq 0 \iff \lim N_i(n)/n > 0$ et e appartient à un plus court chemin entre deux sommets de $\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{F}\}$.

Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

Résultat principal sur le modèle à deux nids

$N_i(n)$ = nombre de chemins renforcés dans G_i jusqu'à l'étape n

Théorème (Mailler, V. 25+)

Presque sûrement,

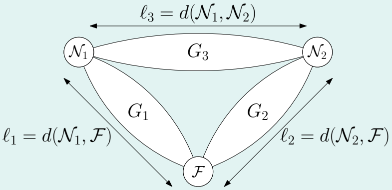
$$\left(\frac{N_1(n)}{n}, \frac{N_2(n)}{n}, \frac{N_3(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} w$$

Si $\ell_1 \le \ell_2$, alors,

- *si $\ell_2 \ge \ell_1 + \ell_3$, alors $w = (1, 0, 1-\alpha)$,*
- *si $\ell_3 \ge \ell_1 + \ell_2$, alors $w = (\alpha, 1-\alpha, 0)$,*
- *sinon $w = (\beta_1, 1-\beta_1, \beta_3)$.*

Et, presque sûrement, $\forall e \in G_i$, $\frac{W_e(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_e$ (aléatoire), où $\xi_e \neq 0 \iff \lim N_i(n)/n > 0$ et e appartient à un plus court chemin entre deux sommets de $\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{F}\}$.

Graphes séries-parallèles en triangle



G_1, G_2 et G_3 graphes séries-parallèles

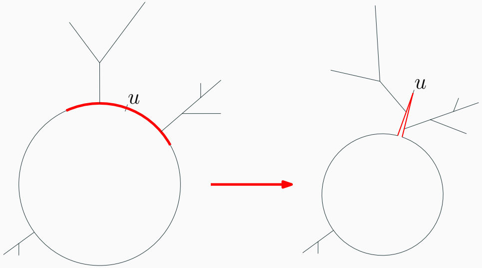
Outils utilisés :

- Urnes de Pólya
- Approximations stochastiques
- Méthode des conductances et résultats sur le modèle à un nid

Perspectives

Perspectives

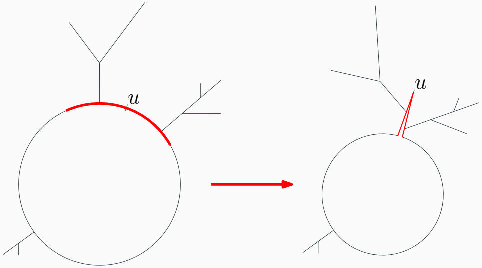
- $\rightarrow$ Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}^2$
- $\rightarrow$ Étude du processus historique associé aux modèles continus de dispersions



- $\rightarrow$ poursuite du modèle des fourmis (sur d'autres familles de graphes et/ou d'autres algorithmes de renforcement)

Perspectives

- $\rightarrow$ Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}^2$
- $\rightarrow$ Étude du processus historique associé aux modèles continus de dispersions



- $\rightarrow$ poursuite du modèle des fourmis (sur d'autres familles de graphes et/ou d'autres algorithmes de renforcement)

Merci !

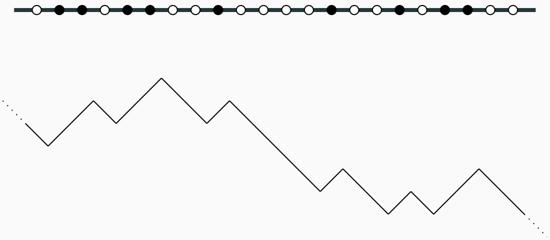
Annexes

Preuve que le golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini

Théorème (V. 2024+)

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage de la configuration initiale

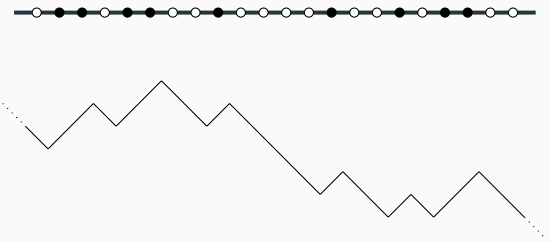


Preuve que le golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini

Théorème (V. 2024+)

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage de la configuration initiale



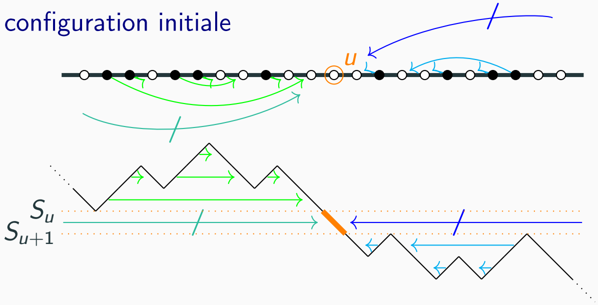
n'a aucune arête à son niveau $\implies$ u n'est jamais occupé par une balle

Preuve que le golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini

Théorème (V. 2024+)

Le modèle de golf sur $\mathbb{Z}$ est bien défini.

Clé : codage de la configuration initiale



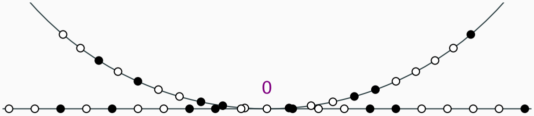
n'a aucune arête à son niveau $\Longrightarrow$ u n'est jamais occupé par une balle

Proposition (cas $d_{\mathrm{b}} < d_{\mathrm{t}}$)

Presque sûrement, il existe un nombre infini de .

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}$ - Idée principale de la preuve

Clé : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$

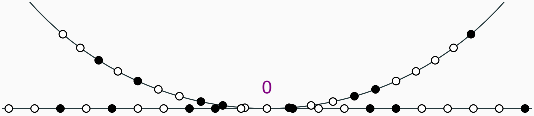


Avec grande proba, et pour n assez grand :

- **L'environnement local suffit** : $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ et $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}^{(n)}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale restreinte à $[-M_R, M_R]$.

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}$ - Idée principale de la preuve

Clé : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$

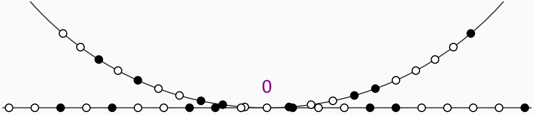


Avec grande proba, et pour n assez grand :

- **L'environnement local suffit** : $\left(\Delta_i T^L\right)_{-R\leq i\leq R}$ et $\left(\Delta_i T^{L^{(n)}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale restreinte à $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations initiales sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** restreintes à $[-M_R, M_R]$

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}$ - Idée principale de la preuve

Clé : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$



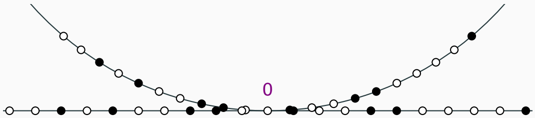
Avec grande proba, et pour n assez grand :

- **L'environnement local suffit** : $\left(\Delta_i T^L\right)_{-R\leq i\leq R}$ et $\left(\Delta_i T^{L^{(n)}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale restreinte à $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations initiales sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** restreintes à $[-M_R, M_R]$
- **couplage des trajectoires** restreintes à $[-M_R, M_R]$

$\Longrightarrow \quad \Delta_i T^L = \Delta_i T^{L^{(n)}}, \ -R \leq i \leq R$

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}$ - Idée principale de la preuve

Clé : couplage avec le cercle, $\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{b}}$, $\frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \to d_{\mathrm{t}}$



Avec grande proba, et pour n assez grand :

- **L'environnement local suffit** : $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ et $\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}^{(n)}}\right)_{-R\leq i\leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale restreinte à $[-M_R, M_R]$.
- **couplage des configurations initiales sur** $\mathbb{Z}$ **et sur** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ restreintes à $[-M_R, M_R]$
- **couplage des trajectoires** restreintes à $[-M_R, M_R]$

$\implies \Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}} = \Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}^{(n)}}, \ -R \leq i \leq R$

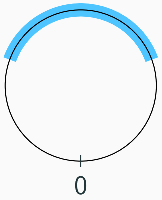
- conclusion : en calculant $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\Delta_i \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{L}^{(n)}} = 2b_i, -R \leq i \leq R\right)$

Distribution des blocs occupés

Cas à un bloc :

$$\mathbb{P}\left(N^{(k)}=1\right)=\left(\sum m_i\right)^{k-1}=: Q\left(\sum m_i, k\right)$$

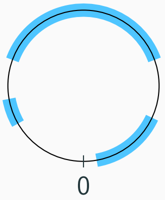
et, conditionalllement à $N^{(k)}=1$, $O^{(k)}=[A, A+\sum m_i]$ avec A uniforme sur $\mathcal{C}$



Distribution des blocs occupés

Cas à un bloc :

$$\mathbb{P}\left(N^{(k)} = 1\right) = \left(\sum m_i\right)^{k-1} =: Q\left(\sum m_i, k\right)$$



et, conditionalllement à $N^{(k)} = 1$, $O^{(k)} = [A, A + \sum m_i]$ avec A uniforme sur $\mathcal{C}$

Cas général :

Théorème

$$\mathbb{P}\left(|O^{(k)}| = (M_0, \dots, M_{b-1})\right) = \mathrm{T}(M_0, \dots, M_{b-1}) \sum_{P \in \mathcal{P}(k,b)} \left[\prod_{\ell=0}^{b-1} Q(M_j, |P_j|) \, \mathbb{1}_{\sum_{i \in P_\ell} m_i = M_\ell}\right]$$

où

- $\mathcal{P}(k, b)$ *l'ensemble des partitions* $P = (P_0, \dots, P_{b-1})$ *de* $\{1, \dots, k-1\}$ *avec* b *parties non vides,*

- $\mathrm{T}(M_0, \dots, M_{b-1}) = M_0 \frac{(1-\Sigma M_\ell)^{b-1}}{(b-1)!} + \frac{(1-\Sigma M_\ell)^b}{b!}$.